

# I турнір математичних боїв “Kharkiv Masters”

## Математичний бій №4, середня ліга

1. Чи існує прямокутний паралелепіпед, у якого числові значення об'єму, площі повної поверхні та суми довжин усіх ребер співпадають?
2. У чотирикутнику  $ABCD$  виконуються рівності  $\angle B = \angle C$  та  $\angle D = 90^\circ$ . Відомо також, що  $AB = 2CD$ . Доведіть, що бісектриса кута  $ACB$  перпендикулярна  $CD$ .
3. Послідовність дійсних чисел  $a_1, a_2, \dots$  задана умовами  $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2}$  при  $n \geq 1$ , причому  $a_1 = 2$ . Доведіть, що для кожного натурального  $N$  виконується нерівність

$$\frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_2} + \dots + \frac{1}{1 + a_N} < 1.$$

4. Усі цифри натурального числа  $N$  попарно різні. Відомо, що якщо поміняти місцями будь-які дві цифри, між якими рівно одна інша, то число  $N$  збільшиться, а якщо поміняти місцями будь-які дві цифри, між якими рівно дві інші, – зменшиться. Знайдіть найбільше можливе значення  $N$ .
5. У трикутнику  $ABC$  точка  $H$  – ортоцентр. Нехай  $N$  – точка на відрізку  $AH$  така, що описані кола трикутників  $BNA$  та  $CNH$  дотикаються одне одного. Доведіть, що описані кола трикутників  $CNA$  та  $BNH$  теж дотикаються одне одного.
6. Числа  $1, 2, \dots, n$  написані на картках (по одному на картці). Перший гравець викидає одну картку. Потім другий гравець викидає дві картки з послідовними числами. Після цього перший гравець викидає три картки з послідовними числами. Нарешті, другий гравець викидає чотири картки з послідовними числами. За якого найменшого  $n$  другий гравець може забезпечити собі можливість здійснити обидва свої ходи?
7. Усі дільники складеного числа  $n$  (включаючи 1 та власне  $n$ ) виписали за зростанням. Потім, між кожними двома сусідніми дільниками записали їхню різницю, а власне дільники витерли. У рядку, що залишився, парні та непарні числа чергуються (перше може бути як парним, так і непарним). Знайдіть усі складені числа  $n$ , для яких це можливо.
8. У країні Глушинній є  $n$  міст ( $n > 10$ ), між деякими з яких прокладені двосторонні дороги. Міста, що з'єднані дорогами, ми будемо називати *сусідніми*. У будь-якого міста  $T$ , крім Столиці, є сусіднє місто, з якого виходить менше доріг, ніж з  $T$ . Яка найбільша кількість доріг може бути в Глушинній?