I турнір математичних боїв “Kharkiv Masters”

Математичний бій №3, старша ліга

1. Многочлени $P(x)$ і $Q(x)$ з дійсними коефіцієнтами задовольняють рівність $P(P(x)) = Q(x)^2$ для будь-якого дійсного x. Доведіть, що існує многочлен $R(x)$ з дійсними коефіцієнтами такий, що $P(x) = R(x)^2$ для будь-якого дійсного x.

2. У трикутнику ABC точка I – центр вписаного кола, I_a – центр зовнівписаного кола, що дотикається сторони BC. Нехай ці вписане та зовнівписане кола дотикаються прямої BC в точках P та Q відповідно, S – середина дуги BC описаного кола Ω трикутника ABC, що не містить точку A. Коло Γ дотикається сторони BC у точці P й кола Ω в точці R, причому A та R лежать по одну сторону від BC. Пряма RI вдруге перетинає коло Ω в точці L. Доведіть, що прямі LI_a та SQ перетинаються на колі Ω.

3. Для всіх натуральних чисел n, позначимо через $g(n)$ найбільший непарний дільник n, а через

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + \frac{n}{g(n)}, & \text{при } n \text{ парному,} \\ 2^{\frac{n+1}{2}}, & \text{при } n \text{ непарному.} \end{cases}$$

Розглянемо послідовність $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ таку, що $a_1 = 1$, $a_{k+1} = f(a_k)$. Знайдіть усі натуральні k, за яких $a_k = 2018$.

4. Знайдіть усі трійки цілих чисел x, y, z, що задовольняють рівність

$$\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} = 2018.$$

5. Петро та Василь грають у таку гру. Спочатку клітини дошки 101×101 заповнені чорними та білими фішками в шаховому порядку (чорних більше, ніж білих). Першим ходом Петро знімає з дошки одну з чорних фішок і переміщує одну з сусідніх за стороною білих фішок на місце, що звільнилося. Потім Василь переміщує чорну фішку на вільне місце, після того Петро – білу фішку на вільне місце, і т. д. (більше фішки с дошки не знімаються, переміщення відбувається на сусідню за стороною клітину). Програє той, хто не може походити. Чи має хтось можливість виграти незалежно від дій суперника, і якщо так, то хто: Петро чи Василь?

6. Доведіть, що для додатних чисел a, b, c виконується нерівність:

$$\frac{1}{abc+a^3+b^3} + \frac{1}{abc+b^3+c^3} + \frac{1}{abc+c^3+a^3} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

7. По колу розташовано $2n+1$ точок: n білих, n червоних і одна чорна. Доведіть, що можна з'єднати $2n$ з цих точок n відрізками так, щоб вони не перетинались і жоден з відрізків не з'єднував білу і червону точки.

8. У рівнобедрену трапецію $ABCD$ вписане коло ω. Нехай M – точка дотику кола ω з бічною стороною CD. Позначимо за K і L відповідно точки перетину відрізків AM і BM з колом ω. Знайдіть значення суми $\dfrac{AM}{AK} + \dfrac{BM}{BL}$.

9. На площині задано $4n$ точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Розглянемо C_{4n}^3 трикутників з вершинами у цих точках. Доведіть, що на площині існує точка X, що належить принаймні $2n^3$ трикутникам.

10. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, для яких рівність $f^2(x+y) = f(x^2) + f(y^2)$ виконується для всіх цілих x та y.