I турнір математичних боїв “Kharkiv Masters”

Математичний бій №3, середня ліга

1. На місці зірочок Соня розставила попарно різні числа так, що рівність $(x + *)(*x + 5) = (2x + *)(x + *)$ виконується за будь-якого x. Яке число написано на місці останньої зірочки?

2. Задано опуклий чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle A = 2\angle B$. На стороні AB знайшлась точка E така, що $\angle BCE = \angle DCE = \angle AED$. Доведіть, що виконується рівність $AE + AD = BE$.

3. Відомо, що числа a, b, c додатні та $a + b + c = 1$. Доведіть, що

$$\frac{a}{3a^2 + b^2 + 2ac} + \frac{b}{3b^2 + c^2 + 2ab} + \frac{c}{3c^2 + a^2 + 2bc} \leqslant \frac{3}{2}.$$

3. *(Замена для боя РЛ-8+ХФМЛ-9 – Харків-27-8)* Натуральные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = abc(a^3 + b^3 + c^3).$$

Докажите, что произведение каких-то двух из этих чисел является точным квадратом.

4. Натуральне число n назвемо *гармонійним*, якщо в нього є два різних натуральних дільники, що знаходяться на однаковій відстані від $\frac{n}{3}$. Скільки існує гармонійних чисел, що не перевищують 2018?

5. Рівносторонній трикутник зі стороною 100 розбитий паралельними сторонам прямими трьох напрямків на багато маленьких трикутничків зі стороною 1. Деякі 77 вершин отриманої трикутної решітки пофарбували в синій колір. Доведіть, що знайдуться дві сині вершини, що лежать на прямій, паралельної одній зі сторін великого трикутника.

6. Знайдіть усі трійки натуральних чисел (a, b, c), для яких число $\frac{(a+b)^4}{c} + \frac{(b+c)^4}{a} + \frac{(c+a)^4}{b}$ є цілим, а число $a + b + c$ – просте.

7. По колу розташовано $2n + 1$ точок: n білих, n червоних і одна чорна. Доведіть, що можна з’єднати $2n$ з цих точок n відрізками так, щоб вони не перетинались і жоден з відрізків не з’єднував білу і червону точки.

8. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло. Прямі AB і CD перетинаються в точці E. Дотична до описаного кола трикутника ADE, проведена в точці D, перетинає пряму CB в точці F. Доведіть, що трикутник CDF рівнобедрений.