I турнір математичних боїв "Kharkiv Masters"

Математичний бій №2, старша ліга

1. Нехай задано послідовність $\{a_k\}$ цілих чисел: $a_1 = m$, $a_2 = n$, $a_{k+1} = 4a_k - 5a_{k-1}$, при $k > 1$. Доведіть, що для будь-якого простого числа $p > 5$ такого, що $p \equiv 1 \pmod 4$, можна так обрати m та n, що в послідовності $\{a_k\}$ жодне число не ділитиметься на p.

2. На уроці фізкультури 2^n учнів вишикувались у шеренгу. За командою «Перелаштуй-СЯ!» вони розраховуються на перший-другий, після чого перші стають у початок шеренги (у тому самому порядку по відношенню один до одного, в якому вони стояли перед цим), а після них стають другі (також зберігаючи своє взаємне розташування). Наприклад, учні, що вишикувались у порядку 12345678 після такої команди стануть у порядку 13572468. Доведіть, що після n команд «Перелаштуй-СЯ!» учні знов стоятимуть у початковому порядку.

3. Женя виписав усі натуральні дільники складеного числа n за зростанням $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Він помітив, що

$$(d_2 - d_1) : (d_3 - d_2) : \ldots : (d_k - d_{k-1}) = 1 : 2 : \ldots : (k-1).$$

Знайдіть усі такі n.

4. У послідовності результатів підкидання монетки можна зустріти "герби", що йдуть відразу за "числом", "числа", що йдуть відразу за "числом", тощо. Позначимо ці ситуації за ЧГ, ЧЧ, тощо відповідно. Наприклад, у послідовності ЧЧГГЧЧЧГЧГ з 10 підкидань три ЧЧ, одне ГГ, три ЧГ, два ГЧ. А скільки існує різних послідовностей результатів 15 підкидань, які мають рівно два ЧЧ, три ЧГ, чотири ГЧ та п'ять ГГ?

5. Коло ω' лежить всередині кола ω й дотикається його в точці N. Дотична до ω' в точці X перетинає ω в точках A і B. Нехай M – середина дуги AB, що не містить N. Доведіть, що радіус описаного кола трикутника BMX не залежить від розташування точки X.

6. Задано дійсне число S. Відомо, що як би ми не обрали декілька чисел з інтервалу $(0, 1]$, сума яких дорівнює S, ці числа можна розділити на дві групи наступним чином: сума чисел у одній з груп не перевищує 1 та сума чисел у іншій не перевищує 5. Знайдіть найбільше можливе значення S.

7. Є три сплави. Перший сплав містить 60% алюмінію, 15% міді та 25% магнію, другий – 30% міді та 70% магнію, а третій – 45% алюмінію та 55% міді. З них потрібно приготувати новий сплав, що містить 20% міді. Який найменший і який найбільший відсоток алюмінію може бути в новому сплаві?

8. У чотирикутник $ABCD$ вписано коло Γ. Точка E – точка перетину Γ з діагоналлю AC, найближча до A. Точка F діаметрально протилежна точці E на колі Γ. Дотична до Γ у точці F перетинає прямі AB і BC в точках A_1 і C_1 відповідно, а прямі AD та CD – в точках A_2 та C_2 відповідно. Доведіть, що $A_1C_1 = A_2C_2$.

9. Нехай d_1, d_2, $\ldots$, d_n – усі натуральні дільники числа 10!. Знайдіть суму

$$\frac{1}{\sqrt{10!} + d_1} + \frac{1}{\sqrt{10!} + d_2} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10!} + d_n}.$$

10. На площині проведено $3n$ жовтих і n синіх прямих загального положення ($n > 2$). Доведіть, що на цій площині є многокутник, усі сторони якого жовті.