I турнір математичних боїв “Kharkiv Masters”

Математичний бій №2, середня ліга

1. Знайдіть усі прості числа p, для яких існує натуральне n таке, що $2^n p^2+1$ є точним квадратом.

2. Женя виписав усі натуральні дільники складеного числа n за зростанням $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Він помітив, що

$$(d_2 - d_1) : (d_3 - d_2) : \ldots : (d_k - d_{k-1}) = 1 : 2 : \ldots : (k-1).$$

Знайдіть усі такі n.

3. На банкетному столі в рядок стоять 100 тарілочок, на кожній з яких лежить по 10 тістечок. Настя та Соня грають у таку гру: вони по черзі (починає Настя) обирають декілька тарілочок та з'їдають по одному тістечку з кожної з них. Забороняється обирати той самий набір тарілочок, який раніше вже хтось обирав. Виграє той, хто з'їсть останнє тістечко з деякої тарілочки. Чи може Настя гарантувати собі перемогу незалежно від гри Соні?

4. У послідовності результатів підкидання монетки можна зустріти “герби”, що йдуть відразу за “числом”, “числа”, що йдуть відразу за “числом”, тощо. Позначимо ці ситуації за ЧГ, ЧЧ, тощо відповідно. Наприклад, у послідовності ЧЧГГЧЧЧГЧГ з 10 підкидань три ЧЧ, одне ГГ, три ЧГ, два ГЧ. А скільки існує різних послідовностей результатів 15 підкидань, які мають рівно два ЧЧ, три ЧГ, чотири ГЧ та п'ять ГГ?

5. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоту AD. Бісектриси кутів BAD та CAD перетинають сторону BC в точках E та F відповідно. Описане коло трикутника AEF перетинає сторони AB та AC в точках G та H відповідно. Доведіть, що прямі EH, FG та AD перетинаються в одній точці.

6. Числа a, b, c задовольняють рівняння $ab + a + b = c$, $bc + b + c = a$, $ca + c + a = b$. Знайдіть усі можливі значення a.

7. Доведіть, що при всіх натуральних n виконується нерівність

$$\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{6n}.$$

8. Продовження бісектриси BL трикутника ABC перетинає його описане коло в точці K. Бісектриса зовнішнього кута B перетинає продовження відрізка CA за точку A в точці N. Доведіть, що якщо $BK = BN$, то відрізок LN дорівнює діаметру описаного кола трикутника.