I турнір математичних боїв “Kharkiv Masters”

Математичний бій №1, старша ліга

1. Задано натуральне число n. У деякій точці з цілими декартовими координатами у тривимірному просторі сидить бджілка. Раз на хвилину вона злітає з точки, у якій знаходилась, та летить у деяку іншу точку площини з цілими координатами. При цьому, відстань між старою та новою точками повинна дорівнювати n. Спочатку бджілка цілком нормальна. Якщо бджілка зараз знаходиться у нормальному стані, то після наступного приземлення вона стає шаленою. Якщо ж з точки площини злітає шалена бджілка, то вона сідає цілком нормальною. Для яких значень n бджілка зможе дістатися таким чином до будь-якої точки площини з цілими координатами, опинившись у ній у цілком нормальному стані? *Відстань між точками з координатами* $(x_1; y_1; z_1)$ *та* $(x_2; y_2; z_2)$ *у просторі дорівнює* $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

2. Коло поділено на n секторів ($n \geqslant 3$). Кожен сектор пофарбовано в блакитний або жовтий колір. Художник Тюбик кожним ходом може вибрати один з блакитних секторів і перефарбувати його і два сусідніх сектори в протилежний колір. Спочатку був рівно один блакитний сектор. Для яких n Тюбик зможе за скінченну кількість ходів пофарбувати всі сектори в жовтий колір?

3. Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, n), $a \geqslant n \geqslant 2$, такі, що $a^n + a - 2$ – степінь двійки.

4. Нехай n – натуральне число. У множині A всі числа не перевищують n, причому найменше спільне кратне будь-яких двох різних елементів A не менше $n+2$. Доведіть, що сума обернених величин елементів множини A менша ніж $\dfrac{3}{2}$.

5. Задано дві послідовності чисел:

$$x_{n+1} = 3x_n + y_n \quad (n \geqslant 1), \quad x_1 = 3 \quad \text{і} \quad y_{n+1} = x_n + 3y_n \quad (n \geqslant 1), \quad y_1 = 1.$$

Знайдіть значення виразу $x_{2018}^2 - y_{2018}^2$.

6. Знайдіть всі функції $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, що задовольняють умову $f(x) - f(x+y) = f\left(\frac{x}{y}\right) f(x+y)$ для будь-яких $x, y > 0$.

7. Побудуйте трикутник ABC за $\angle C$, точкою C та точками K і M перетину серединних перпендикулярів до сторін AC і BC трикутника з висотою CH.
Дослідження робити не потрібно.

8. Нехай AL – бісектриса трикутника ABC. Точки Q і N – середини сторін AB і BC відповідно. Прямі AL і QN перетинаються в точці F. Точки K і T – відповідно точки дотику вписаного та зовнівписаного кіл цього трикутника зі стороною BC. Знайдить величину кута KFT.

9. Позначимо через $A(n)$ кількість послідовностей $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_k$ натуральних чисел, для яких $a_1 + \ldots + a_k = n$ та для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ число $a_i + 1$ є степенем двійки. Через $B(n)$ позначимо кількість послідовностей $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_m$ натуральних чисел, для яких $b_1 + \ldots + b_m = n$ та для кожного $j = 1, 2, \ldots, m-1$ виконується нерівність $b_j \geqslant 2b_{j+1}$. Доведіть, що $A(n) = B(n)$ для будь-якого натурального числа n.

10. Доведіть, що для будь-яких натуральних чисел p і q таких, що $\sqrt{11} > \dfrac{p}{q}$, виконується нерівність $\sqrt{11} - \dfrac{p}{q} > \dfrac{1}{2pq}$.