

I турнір математичних боїв “Kharkiv Masters”

Математичний бій №1, середня ліга

1. Задано натуральне число n . У деякій точці з цілими координатами на декартовій площині сидить бджілка. Раз на хвилину вона злітає з точки $(x_1; y_1)$, у якій знаходилась, та летить у деяку іншу точку площини з цілими координатами $(x_2; y_2)$. При цьому, повинна виконуватися умова: $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = n$. Спочатку бджілка цілком нормальна. Якщо бджілка зараз знаходиться у нормальному стані, то після наступного приземлення вона стає шаленою. Якщо ж з точки площини злітає шалена бджілка, то вона сідає цілком нормальною. Для яких значень n бджілка зможе дістатися таким чином до будь-якої точки площини з цілими координатами, опинившись у ній у цілком нормальному стані?

2. Коло поділено на n секторів ($n \geq 3$). Кожен сектор пофарбовано в блакитний або жовтий колір. Художник Тюбик кожним ходом може вибрати один з блакитних секторів і перефарбувати його і два сусідніх сектори в протилежний колір. Спочатку був рівно один блакитний сектор. Для яких n Тюбик зможе за скінченну кількість ходів пофарбувати всі сектори в жовтий колір?

3. Знайдіть усі трійки цілих чисел a, b, c , що задовольняють рівності

$$a^2 = bc + 1 \quad \text{та} \quad b^2 = ac + 1.$$

4. Нехай n – натуральне число. У множині A всі числа не перевищують n , причому найменше спільне кратне будь-яких двох різних елементів A не менше, ніж $n + 2$. Доведіть, що сума обернених величин елементів множини A менша, ніж 2.

5. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведені бісектриси AK і CL . На основі AC відмічено точку X , а на відрізку CX – точку Y так, що $AL = AX$ і $CK = CY$. Промені LX і KY перетинаються в точці Z . Знайдіть, чому дорівнює сума $2\angle AZC + 3\angle ABC$.

6. Числа a і b задовольняють умові $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} = 1$. Які значення може приймати вираз $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{1}{ab}$?

7. Послідовність a_1, a_2, \dots, a_{100} задовольняє умову $a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$ при всіх натуральних $n \leq 97$. Крім цього, відомо, що $a_1 = a_3 = 1$ і $a_{98} = a_{99}$. Знайдіть значення суми $a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$.

8. Нехай AL – бісектриса трикутника ABC . Точки Q і N – середини сторін AB і BC відповідно. Прямі AL і QN перетинаються в точці F . Точки K і T – відповідно точки дотику вписаного та зовнішнього кіла цього трикутника зі стороною BC . Знайдіть величину кута KFT .