10 класс

1. На футбольный матч между командами «Динамо» и «Шахтёр» пришло много зрителей. Каждый болельщик «Динамо» съел в течение матча 2 хот-дога, 4 бургера и выпил 4 бутылочки лимонада. Каждый болельщик «Шахтёра» съел 5 хот-догов, 4 бургера и выпил 6 бутылочек лимонада. После матча администрация стадиона посчитала, что всего было выпито 20000 бутылочек лимонада. А сколько всего, считая вместе, хот-догов и бургеров было съедено? Ответ обоснуйте.

2. Даны простые числа p, q, r и натуральное n такие, что числа $\dfrac{p+n}{qr}$, $\dfrac{q+n}{rp}$, $\dfrac{r+n}{pq}$ являются целыми. Докажите, что $p=q=r$.

3. Ненулевые числа a, b, c таковы, что выполнена система

$$\begin{cases} a^2+b+c=\dfrac{1}{a}, \\ b^2+c+a=\dfrac{1}{b}, \\ c^2+a+b=\dfrac{1}{c}. \end{cases}$$

Докажите, что среди чисел a, b, c есть хотя бы два равных.

4. В городе построено 2019 станций метро. Некоторые пары станций соединены тоннелями, причём от любой станции по тоннелям можно добраться до любой другой. Мэр распорядился организовать несколько линий метро: каждая линия должна включать в себя несколько различных станций, последовательно соединённых тоннелями (по одному и тому же тоннелю может проходить несколько линий, но могут быть тоннели, не включённые ни в одну линию). При этом каждая станция должна лежать хотя бы на одной линии. Для экономии средств следует сделать не более k линий. Оказалось, что приказ мэра неосуществим. При каком наибольшем k это могло произойти? Ответ обоснуйте.

5. В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, I_a – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Пусть K – точка пересечения BC с внешней биссектрисой угла BAC, а E – середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что K – ортоцентр треугольника II_aE.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
На выполнение заданий отводится 3,5 часа.
Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.

10 клас

1. На футбольний матч між командами «Динамо» та «Шахтар» прийшло багато глядачів. Кожен уболівальник «Динамо» з'їв протягом матчу 2 хот-доги, 4 бургери й випив 4 пляшки лимонаду. Кожен уболівальник «Шахтаря» з'їв 5 хот-догів, 4 бургери й випив 6 пляшок лимонаду. Після матчу адміністрація стадіону підрахувала, що всього було випито 20000 пляшок лимонаду. А скільки всього, рахуючи разом, хот-догів і бургерів було з'їдено? Відповідь обґрунтуйте.

2. Дано прості числа p, q, r і натуральне n такі, що числа $\dfrac{p+n}{qr}$, $\dfrac{q+n}{rp}$, $\dfrac{r+n}{pq}$ – цілі. Доведіть, що $p=q=r$.

3. Ненульові числа a, b, c задовольняють систему

$$\begin{cases} a^2+b+c=\dfrac{1}{a}, \\ b^2+c+a=\dfrac{1}{b}, \\ c^2+a+b=\dfrac{1}{c}. \end{cases}$$

Доведіть, що серед чисел a, b, c є принаймні два рівних.

4. У місті побудовано 2019 станцій метро. Деякі пари станцій з'єднані тунелями, причому від будь-якої станції по тунелях можна дістатися будь-якої іншої. Мер розпорядився організувати декілька ліній метро: кожна лінія повинна містити декілька різних станцій, послідовно з'єднаних тунелями (по одному й тому ж тунелю може проходити декілька ліній, але можуть бути тунелі, не включені до жодної з ліній). При цьому кожна станція повинна належати принаймні одній лінії. Задля економії коштів слід зробити не більше k ліній. Виявилося, що наказ мера нездійсненний. Для якого найбільшого k це могло статися? Відповідь обґрунтуйте.

5. У трикутнику ABC точка I – центр вписаного кола, I_a – центр зовнівписаного кола, що дотикається сторони BC. Нехай K – точка перетину BC із зовнішньою бісектрисою кута BAC, а E – середина дуги BAC описаного кола трикутника ABC. Доведіть, що K – ортоцентр трикутника II_aE.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 3,5 години.
Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Условия и решения задач олимпиады и результаты участников можно узнать по адресу `sites.google.com/site/kharkivolimp/`
Апелляция состоится 28 октября с 15^{15} до 17^{00} в ауд. 6-52.

Умови та розв'язки задач олімпіади та результати учасників можна знайти за адресою `sites.google.com/site/kharkivolimp/`
Апеляція відбудеться 28 жовтня з 15^{15} до 17^{00} в ауд. 6-52.