9 класс

1. Шон живёт в трёхэтажном доме. Однажды он посчитал, что в его доме ровно у 35 жильцов есть соседи снизу, а ровно у 45 жильцов есть соседи сверху. Кроме того, ровно треть жильцов этого дома живёт на втором этаже. Сколько людей живёт в одном доме с Шоном? Ответ обоснуйте.

2. Различные ненулевые вещественные числа x, y, z удовлетворяют условию

$$\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}.$$

Докажите, что

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

3. В стране некоторые города соединены прямыми дорогами. Известно, что из каждого города выходит не более 10 дорог. Также известно, что всего дорог между городами в стране больше 200. Докажите, что можно выбрать 11 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

4. Две окружности γ и ω таковы, что окружность ω проходит через центр окружности γ. Пусть A и B – точки пересечения ω и γ. На окружности ω выбрана произвольная точка P. Прямые PA и PB второй раз пересекают γ в точках E и F соответственно. Докажите, что $AB=EF$.

5. Последовательность $\{a_n\}$ определена условиями $a_1=1$ и

$$a_n=n(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}) \text{ при всех } n>1.$$

Найдите все n, для которых a_n делится на $n!$. Ответ обоснуйте.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
На выполнение заданий отводится 3,5 часа.
Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами
и другими электронными устройствами запрещается.

Условия и решения задач олимпиады и результаты участников можно узнать по адресу `sites.google.com/site/kharkivolimp/`
Апелляция состоится 28 октября с 15^{15} до 17^{00} в ауд. 6-52.

9 клас

1. Шон мешкає в триповерховому будинку. Одного разу він порахував, що в його будинку рівно в 35 мешканців є сусіди знизу, а рівно в 45 мешканців є сусіди зверху. Крім цього, рівно третина мешканців цього будинку мешкає на другому поверсі. Скільки людей мешкає в одному будинку з Шоном? Відповідь обґрунтуйте.

2. Різні ненульові дійсні числа x, y, z задовольняють умову

$$\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}.$$

Доведіть, що

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

3. У країні деякі міста сполучені прямими дорогами. Відомо, що з кожного міста виходить не більше, ніж 10 доріг. Також відомо, що всього доріг між містами у країні більше за 200. Доведіть, що можна обрати 11 доріг, жодні дві з яких не виходять з одного міста.

4. Два кола γ і ω такі, що коло ω проходить через центр кола γ. Нехай A і B – точки перетину ω і γ. На колі ω обрано довільну точку P. Прямі PA і PB вдруге перетинають γ в точках E і F відповідно. Доведіть, що $AB=EF$.

5. Послідовність $\{a_n\}$ визначено умовами $a_1=1$ і

$$a_n=n(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}) \text{ для всіх } n>1.$$

Знайдіть усі n, для яких a_n ділиться на $n!$. Відповідь обґрунтуйте.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 3,5 години.
Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами
та іншими електронними пристроями забороняється.

Умови та розв'язки задач олімпіади та результати учасників можна знайти за адресою `sites.google.com/site/kharkivolimp/`
Апеляція відбудеться 28 жовтня з 15^{15} до 17^{00} в ауд. 6-52.